ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. XXVI, 20 SECTIO H 1992

Zakład Nauk Ekonomicznych Filii UMCS w Rzeszowie

Elżbieta MAKSYMIAK

Warunek wystarczający oraz warunki konieczne na koincydencji zmiennej

Sufficient Condition and Necessary Conditions for Explanatory Variable

W niniejszej pracy sformułujemy i udowodnimy jeden warunek wystarczający i dwa warunki konieczne na to, by zmienna objaśniająca miała własność koincydencji.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$R(k) = [r_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,k}$ — macierz korelacji pomiędzy zmiennymi objaśniającymi,

$R_0(k) = [r_i]_{i=1,2,\cdots,k}$ — macierz korelacji pomiędzy zmiennymi objaśniającymi a zmienną objaśnianą,

$r^2(k)$ — kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla modelu opisywanego przez parę korelacyjną $(R(k), R_0(k))$,

$R_i(k;-i)$ — i-ta kolumna macierzy $R(k)$ z usuniętym i-tym elementem,

$R(k;-i)$ — macierz $R(k)$ bez i-tego wiersza oraz i-tej kolumny,

$R_0(k;-i)$ — wektor $R_0(k)$ bez i-tej kolumny skladowej,

$r^2(k;-i)$ — kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla modelu określonego przez parę korelacyjną $(R(k;-i), R_0(k;-i))$

oraz niech

$$P(k) = \begin{bmatrix} R(k) & R_0(k) \\ [R_0(k)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$P(k;-i) = \begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$M^2(k) = r^2(k) \det R(k), \tag{3}$$

$$M^2(k;-1) = r^2(k;-i) \det R(k;-i), \tag{4}$$

Poniżej podamy jeszcze twierdzenia, z których będziemy korzystać w niniejszej pracy.

Twierdzenie 1 ([2])

Jeżeli macierz wewnętrzna A macierzy brzegowej A_1 zdefiniowanej następująco

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & f \\ g & z \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}, \tag{5}$$

gdzie

$A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,k}$,

$g = [g_1, g_2, \cdots, g_k]$,

$f^{\mathrm{T}} = [f_1, f_2, \cdots, f_k]$,

$z \in \mathrm{R}$ (R — zbiór liczb rzeczywistych),

jest nieosobliwa, to

$$\frac{\det A_1}{\det A} = z - gA^{-1}f. \tag{6}$$

Twierdzenie 2 ([1])

Jeżeli macierz A podwójnej macierzy brzegowej zdefiniowanej następująco

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & f_1^{\mathrm{T}} & f_2^{\mathrm{T}} \\ g_1 & a & b \\ g_2 & c & d \end{bmatrix},$$

gdzie

$A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,k}$,

$f_1 = [f_{i1}]_{i=1,2,\cdots,k}$,

$f_2 = [f_{i2}]_{i=1,2,\cdots,k}$,

$g_1 = [g_{i1}]_{i=1,2,\cdots,k}$,

$g_2 = [g_{i2}]_{i=1,2,\cdots,k}$,

$a, b, c, d \in \mathrm{R}$

jest nieosobliwa, to

$$\det A_1 \det A = \det A_a \det A_d - \det A_b \det A_c,$$

przy czym

$$A_a = \begin{bmatrix} A & f_1^{\mathrm{T}} \\ g_1 & a \end{bmatrix}, A_b = \begin{bmatrix} A & f_2^{\mathrm{T}} \\ g_1 & b \end{bmatrix}, A_c = \begin{bmatrix} A & f_1^{\mathrm{T}} \\ g_2 & c \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} A & f_2^{\mathrm{T}} \\ g_2 & d \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 3 ([2])

Jeżeli $r^2(k)$ oznacza kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla

modelu określonego przez parę korelacyjną $(R(k), R_0(k)$, to $r^2(k) = [R_0(k)]^T[R(k)]^{-1}R_0(k)$.

Twierdzenie 4 ([3])

Jeżeli $r^2(k) = r^2(k; -i)$, to i-ta zmienna objaśniająca modelu opisywanego przez parę korelacyjną $(R(k), R_0(k)$ nie jest koincydentna.

Twierdzenie 5 ([1])

I-ta zmienna objaśniająca modelu określonego przez regularną parę korelacyjną $(R(k), R_0(k)$ ma własność koincydencji wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_i - [R_i(k; -i)]^T[R(k; -i)]^{-1}R_0(k; -i) > 0.$$

Twierdzenie 6 ([4])

Dla wektorów $x, y \in \mathrm{R}^n$ prawdziwa jest następująca równoważność

$$x, y \text{ są liniowo zależne} \iff (x, y)^2 = (x, x) \cdot (y, y),$$

gdzie (x, y) — oznacza iloczyn skalarny wektorów x i y.

Twierdzenie 7 ([3])

Jeżeli x, y są wektorami z przestrzeni R^n, zaś A jest macierzą dodatnio określoną stopnia n, to $x^T Ay = (x, y)$.

((x, y) — oznacza iloczyn skalarny wektorów x i y).

Z kolei sformułujemy i udowodnimy zapowiedziane wcześniej twierdzenia.

Twierdzenie 8

Jeżeli $M^2(k) < M^2(k; -i)$ i $\frac{M^2(k)-M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + r_i^2 = 0$ oraz jeśli:

a) wektory $R_0(k; -i)$, $R_i(k; -i)$ są liniowo zależne to i-ta zmienna objaśniająca nie jest koincydentna,

b) wektory $R_0(k; -i)$, $R_i(k; -i)$ są liniowo niezależne to i-ta zmienna objaśniająca jest koincydentna.

Dowód

a)

Przesuńmy w macierzy $P(k)$ i-tą kolumnę w miejsce k-tej kolumny oraz i-ty wiersz w miejsce k-tego wiersza. Otrzymamy wtedy macierz postaci

$$P'(k) = \begin{bmatrix} R(k; -i) & R_i(k; -i) & R_0(k; -i) \\ [R_i(k; -i)]^T & 1 & r_i \\ [R_0(k; -i)]^T & r_i & 1 \end{bmatrix}$$

Z odpowiedniej własności wyznacznika wynika, że

$$\det P(k) = \det \begin{bmatrix} R(k; -i) & R_i(k; -i) & R_0(k; -i) \\ [R_i(k; -i)]^T & 1 & r_i \\ [R_0(k; -i)]^T & r_i & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Korzystając z twierdzenia 2 oraz równania (7) otrzymujemy następującą zależność

$$\det P(k)\det R(k;-i) = = \det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} - -\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & r_i \end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & r_i \end{bmatrix} \tag{8}$$

Ale zauważmy, że

$$\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \det R(k) \tag{9}$$

zaś na mocy twierdzenia 1 mamy następujący związek

$$\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & r_i \end{bmatrix} = = \det R(k;-i)(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)). \tag{10}$$

Z kolei na podstawie twierdzenia 1 oraz twierdzenia 3 mamy równość

$$\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \det R(k;-i)(1 - r^2(k;-i)) \tag{11}$$

a korzystając z równości (1), twierdzenia 1 i 3 otrzymujemy zależność

$$\det P(k) = \det R(k)(1 - r^2(k)). \tag{12}$$

Po zastosowaniu wzorów (9), (10), (11) i (12) równanie (8) przyjmuje postać

$$(\det R(k) - \det R(k)r^2(k))\det R(k;-i) = = \det R(k)\det R(k;-i)(1 - r^2(k;-i)) - -(\det R(k;-i))^2(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2. \tag{13}$$

Stąd

$$[r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)]^2\det R(k;-i) = = \det R(k)r^2(k) - \det R(k)r^2(k;-i). \tag{14}$$

Przekształćmy równość (14) w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
&2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i) = \\
&= r_i^2 - ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2 + \\
&+\frac{r^2(k)\det R(k) - r^2(k;-i)\det R(k)}{\det R(k;-i)}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Z kolei dodajmy i odejmijmy do prawej strony równości (15) wyrażenie

$$
\frac{r^2(k;-i)\det R(k;-i)}{\det R(k;-i)}.
$$

Wtedy

$$
\begin{aligned}
&2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) = \\
&= r_i^2 - ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2 + \\
&+\frac{r^2(k)\det R(k) - r^2(k;-i)\det R(k;-i)}{\det R(k;-i)} + \\
&+\frac{r^2(k;-1)(\det R(k;-i) - \det R(k))}{\det R(k;-i)}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Ale z równości (9), twierdzenia 1 i 3

$$
\begin{aligned}
&\frac{r^2(k;-i)(\det R(k;-i) - \det R(k))}{\det R(k;-i)} = \\
&= ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i)) \cdot \\
&\cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Ostatecznie na podstawie wzorów (3), (4) i (17) równość (16) przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
&2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) = \\
&= r_i^2 + \frac{M^2(k) - M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i)) \cdot \\
&\cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) - \\
&-([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Ponieważ macierz $[R(k;-1)]^{-1}$ jest dodatnio określona, więc na podstawie twierdzenia 6 i 7 oraz liniowej zależności wektorów $R_0(k;-i)$ i $R_i(k;-i)$

wynika, że

$$
\begin{aligned}
&([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i))\cdot\\
&\cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) =\\
&= ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Z kolei korzystając z równania $\frac{M^2(k)-M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + r_i^2 = 0$ oraz wzoru (19) widzimy, że prawa strona zależności (18) jest równa zero czyli

$$2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) = 0$$

co oznacza w myśl twierdzenia 5, że i-ta zmienna objaśniająca nie jest koincydentna.

b)

Z nierówności postaci

$$
\begin{aligned}
&([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i))\cdot\\
&\cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) \geq\\
&\geq ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2
\end{aligned}
$$

wykazanej w pracy [1], liniowej niezależności wektorów $R_0(k;-i)$ i $R(k;-i)$ oraz twierdzenia 6 i 7 wynika, że

$$
\begin{aligned}
&([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i))\cdot\\
&([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) >\\
&> ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Ale ponieważ $\frac{M^2(k)-M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + r_i^2 = 0$ i zachodzi nierówność (20), więc prawa strona równania (18) jest większa od zera.

Stąd również

$$2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) > 0$$

a więc w myśl twierdzenia 5 i-ta zmienna objaśniająca jest koincydentna.

c.n.d.

Twierdzenie 9

Jeżeli $r^2(k;-i) = 1$, to i-ta zmienna objaśniająca modelu opisywanego przez parę korelacyjną $((R(k),\ R_0(k))$ nie ma własności koincydencji.

D o w ó d

Zauważmy, że lewa strona równania (14) jest zawsze większa lub równa zero więc prawdziwa jest nierówność

$$\det R(k)(r^2(k) - r^2(k;-i)) \geq 0$$

a stąd mamy, że

$$r^2(k) \geq r^2(k; -i). \tag{21}$$

Ponieważ $r^2(k; -i) = 1$, więc z zależności (21) oraz z faktu, że $r^2(k) \in < 0, 1 >$ otrzymujemy następującą równość

$$r^2(k) = 1,$$

czyli na mocy twierdzenia 4 i-ta zmienna objaśniająca nie jest koincydentna.

c.n.d.

W twierdzeniu 8 istotną rolę odgrywa miernik $M^2(k)$, który jest iloczynem kwadratu współczynnika korelacji wielowymiarowej modelu o k zmiennych objaśniających i wyznacznika macierzy korelacji zmiennych objaśniających. Jeżeli miernik $M^2(k)$ jest mniejszy od takiego samego miernika ale obliczonego dla modelu bez i-tej zmiennej objaśniającej (miernik ten oznaczono symbolem $M^2(k; -i)$) oraz jeśli różnica $M^2(k; -i) - M^2(k)$ jest równa iloczynowi kwadratu współczynnika korelacji i-tej zmiennej objaśniającej i zmiennej objaśnianej oraz wyznacznika macierzy korelacji zmiennych objaśniających bez i-tej zmiennej, to twierdzenia 8 rozstrzyga problem koincydencji i-tej zmiennej objaśniającej w zależności od liniowej zależności (niezależności) takich dwóch wektorów, z których jeden ma współrzędne równe współczynnikom korelacji między zmiennymi objaśniającymi (bez i-tej) a zmienną objaśnianą, natomiast współrzędne drugiego wektora są równe współczynnikom korelacji i-tej zmiennej objaśniającej z pozostałymi zmiennymi objaśniającymi.

Z kolei jeśli kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla modelu bez i-tej zmiennej objaśniającej jest równy 1, to na mocy twierdzenia 9 wnioskujemy, że i-ta zmienna nie ma własności koincydencji. Inaczej mówiąc, jeśli i-ta zmienna objaśniająca jest koincydentna, to kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej obliczonego dla modelu bez i-tej zmiennej nie może być równy 1.

Twierdzenia 8 i 9 służą do badania koincydencji dowolnej zmiennej objaśniającej bez korzystania z definicji koincydencji, która orzeka, że i-ta zmienna objaśniająca ma własność koincydencji, jeżeli $\text{sign} r_i = \text{sign} a_i$, gdzie a_i jest oceną i-tego parametru strukturalnego otrzymaną w wyniku estymacji metodą najmniejszych kwadratów. Koincydencja zmiennych objaśniających jest jednym z głównych postulatów dotyczących cech „dobrego" modelu. W przypadku gdy model nie jest koincydentny, to nie istnieje sensowna interpretacja oszacowania parametrów strukturalnych tego modelu.

LITERATURA

[1] Borowiecki A.: Metody doboru zmiennych i zagadnienie koincydencji, Praca doktorska, SGPiS Warszawa 1983.
[2] Kolupa M.: Macierze brzegowe w badaniach ekonometrycznych, PWE, Warszawa 1982.
[3] Maksymiak E.: O badaniu koincydencji dowolnej zmiennej objaśniającej, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie, 1987, 243.
[4] Mostowski A., Stark M.: Algebra liniowa, PWN, Warszawa 1958.

SUMMARY

The present paper is devoted to the study of coincidence if a discretionary variable interpreting the econometric model. The work formulates and proves one sufficient condition and two necessary conditions for the interpretative variable to have the property of coincidence.

ANNALES UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA

Nakład 250 + 25, ark. wyd. 14, ark. druk. 18, papier offsetowy kl. III, 80g, B1.

Druk: Drukarnia UMCS w Lublinie. Zam. 16/93

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XXV SECTIO H 1991

Adresse:

UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
WYDAWNICTWO
Plac Marii
Curie-Skłodowskiej 5 20-031 LUBLIN POLOGNE